Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Développements :

Etude asymptotique de l'équation de Bessel, Résolution de l'équation de la chaleur.

Bibliographie :

Gourdon, Berthelin, Bernis, Nourdin, Demailly,ZQ.

Rapport du jury :

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre. L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (Sturm, Hill-Mathieu, . . .) sont aussi d'autres possibilités.

Remarque 1 (Berth p11). *Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1 Solutions d'équations différentielles linéaires : existence, unicité, structure (généralités)

1.1 Existence et unicité des solutions

Definition 2 (Gourdon p357). *[Berth p11 bof] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Equation différentielle d'ordre n, équation homogène.*

Remarque 3 (Berth p11). *Lorsque $N = 1$, on parle d'équation différentielle scalaire, sinon on parle d'équation différentielle vectorielle.*

Definition 4 (Berth p11). *Solution d'une équation d'ordre n.*

Proposition 5 (Berth p21). *[Gourdon p357]] Equation d'ordre n mise sous forme de l'ordre 1. En particulier, une équation différentielle scalaire d'ordre n se ramène à une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 en dimension n. On se limitera donc à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 1.*

Exemple 6 (Berth p22). *$y'' = y$.*

Exemple 7 (Nourdin p38). *Oscillateur harmonique amorti. Si une masse ponctuelle m est suspendue à un ressort de coefficient de rappel F et d'amortissement k, le déplacement vertical x à partir de la position d'équilibre vérifie $x'' = -(k/m)x' - (F/m)x$.*

Remarque 8 (Berth p25). *On étudie donc l'équation $y' = A(t)y + b(t)$.*

Theoreme 9 (Berth p30). *[Gourdon p358] Théorème de Cauchy Lipschitz linéaire. Pour tout $t_0 \in I$, $Y_0 \in K^n$, il existe une unique fonction $Y \in C^1(I, K^n)$ satisfaisant $\forall t \in I$, $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ et $Y(t_0) = Y_0$.*

Remarque 10 (Gourdon p358). *[Berth p33] Cas d'une équation d'ordre p.*

Contre exemple 11 (Berth p16,p120,525). *$y' = y^2$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

$y' = \sqrt{y}$: les solutions maximales sont la fonction nulle et les y_C.

$y' = 3|y|^{2/3}$, $y(0) = 0$ admet au moins deux solutions maximales : la fonction nulle et t^3.

Application 12. *Soit $_phi$ solution de $y' = a(t)y + b(t)$. On suppose a et b T-périodiques. Alors ϕ est T-périodique si et seulement si $\phi(0) = \phi(T)$.*

1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Remarque 13. *Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire a un certain nombre de conséquences importantes. En particulier, il donne la structure de l'espace des solutions.*

Theoreme 14 (Berth p34). *Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. (sev des fonctions continues, isomorphisme avec K^N et donc de dimension N.)*

Remarque 15 (Gourdon p358). *Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène sur K^N d'ordre n forment un K-ev de dimension Np.*

Corollaire 16 (Berth p35). *L'ensemble des solutions de l'équation est un espace affine de direction l'ensemble des solutions de l'équation homogène.*

Contre exemple 17 (Gourdon p361). *$(1-t^2)y' + ty = 0$ équation différentielle linéaire d'ordre 1 mais l'ensemble des solutions est de dimension 0 (la solution nulle est le seul raccordement qui convient).*

On considère l'équation $ty'(t) - 3y(t) = 2t^5$. Si on pose $\phi(t) = t^3 1_{t\leq 0}, \psi(t) = t^3 1_{t\geq 0}$ et $g(t) = t^5$, alors l'ensemble des solutions est $P = g + \lambda\phi + \mu\psi, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui est un plan affine de dimension 2 bien que l'équation soit scalaire d'ordre 1.

Ou $ty' - 2y = 0$, espace des solutions de dimension 2. (cours prépa).

Remarque 18. *Solution générale de l'équation=solution générale de l'équation homogène + solution particulière de l'équation avec second membre.*

Proposition 19 (Nourdin p41). *Principe de superposition.*

Definition 20 (Berth p40). *[Gourdon p358] Système fondamental de solutions, matrice fondamentale (? = résolvante), wronskien.*

Exemple 21 (Gourdon p359). *Wronskien de deux solutions de $y" = p(t)y + q(t)y$.*

Proposition 22 (Gourdon p368). *[Berth p44] Pour $y' = A(t)y$, $w(t) = w(a)exp(\int_a^t tr(A(u))du)$.*

Proposition 23 (Gourdon p359). *[Berth p40] Les solutions forment une base de solutions de l'équation homogène si et seulement si leur wronskien est non nul en tout t si et seulement si il existe t_0 tel que le wronskien en t_0 est non nul.*

Remarque 24. *Le wronskien est nul ou ne s'annule jamais.*

2 Résolutions d'équations différentielles linéaires.

Remarque 25. *Il va s'agir d'une part de trouver une base de solutions de l'équation homogène et d'autre part de trouver une solution particulière.*

2.1 Recherche d'une base de solutions homogènes

Proposition 26 (Gourdon p360). *[Demailly p201] Solution de $y' = Ay$, $y(t_0) = V_0$ est $exp((t - t_0)A)V_0$.*

Exemple 27 (Gourdon p363). *Système différentiel.*

Application 28. *Si A et B commutent, $exp(A + B) = exp(A)exp(B)$.*

Proposition 29 (Demailly p199). *[Berth p52] Cas A diagonalisable. Parler de Dunford/Jordan ?*

Exemple 30 (Berth p52).

Proposition 31 (Berth p36). *[Gourdon p359] Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1.*

Exemple 32 (Gourdon p359).

Remarque 33. *Dans le cas particulier d'une EDO linéaire scalaire d'ordre p, la matrice A est une matrice compagnon. On est ainsi réduit à chercher les racines de $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + ... + a_1X + a_0$.*

Proposition 34 (Demailly p208). *[Berth p58] Si P a pour racines $\lambda_1, .., \lambda_r$, de multiplicités $m_1, .., m_r$ alors un système fondamental de solutions de l'équation homogène est donné par les fonctions $t \to t^q exp(\lambda_j t)$, $1 \leq j \leq r$, $0 \leq qj \leq m_j - 1$.*

Corollaire 35 (Berth p61). *Base de solutions réelles.*

Exemple 36 (Berth p62). *Cas de l'ordre 2.*

Proposition 37 (Bernis). *Equation de la chaleur par séparation des variables.*

2.2 Recherche d'une solution particulière

Proposition 38. *Méthode de variation de la constante dans le cas général.*

Exemple 39 (Demailly p202). *Pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre $Y'(t) = AY(t) + B(t)$, on la cherche sous la forme $Y(t) = exp(tA)V(t)$ où V de classe C^1.*

Proposition 40 (Demailly p203). *[Berth p54] Formule de Duhamel.*

Proposition 41 (Berth p55). *Détail de la méthode pour les équations d'ordre 2.*

Exemple 42 (Berth p55). *$y" - 2y' + y = exp(t)$.*

Exemple 43 (Berth p55). *[Gourdon p361] $t^2y" - 2y = 3t^2$*

Exemple 44 (Demailly p209). *[Gourdon p362] Pour $t \in] - \pi/2, \pi/2[$, un système fondamental de solutions de $y"(t) = -4y + tan(t)$ est donné par $t \to cos(2t)$, $t \to sin(2t)$. La méthode de variation des constantes donne la solution particulière $y(t) = -t^2cos(2t) + 1/2sin(2t)ln(cos(t))$.*

Application 45 (Berth p80). *$f + f' \to l$ alors $f \to l$.*

Proposition 46 (Berth p64). *Solution particulière avec second membre $Q(t)exp(\mu t)$. (Regarder les différents cas dans Berth p67)*

Exemple 47 (Berth p69). *Exemple de la forme d'une solution particulière.*

Proposition 48 (Berth p142). *Méthode d'abaissement de l'ordre (Liouville).*

Exemple 49 (Berth p175).

Proposition 50 (Berth p150). *Utilisation des séries entières.*

Exemple 51 (Berth p147,p175). *$(t^2 + t)y" + (3t + 1)y' + y = 0$, équation de Bessel, équation de Legendre.*

2.3 Des équations non linéaires qui se ramènent à des équations linéaires

Proposition 52. *Bernoulli, Ricatti..*

3 Etude qualitative

3.1 Stabilité des équilibres

Definition 53 (ZQ p382)**.** *Point d'équilibre.*

Definition 54 (Berth p234)**.** *[ZQ p382] Stabilité. Stabilité asymptotique. (Dessin)[Demailly p282]*

Exemple 55 (Berth p236)**.** $y' = y, y' = -y$.

Theoreme 56 (Berth p239)**.** *[Demailly p285] Cas homogène à coefficients constants,* 0 *est point d'équilibre et discuter la stabilité.*

Remarque 57 (Berthelin p205)**.** *[Demailly p291] Faire les dessins des noeuds en dimension* 2.

Exemple 58. $x" + x = 0$.

Definition 59 (Rouvière p138)**.** *Système linéarisé.*

Proposition 60 (Berth p247)**.** *[Rouvière p141] Stabilité par linéarisation.*

Exemple 61 (Berth p260)**.** *Exemple d'un système* 2×2.

Contre exemple 62 (Demailly p289)**.** *On ne peut pas décider de la nature du point critique si la matrice jacobienne a une valeur propre de partie réelle nulle.*

$x' = \alpha x^3, y' = \beta y^3$.

Exemple 63 (FGN p189)**.** 0 *est asymptotiquement stable.*

Remarque 64. *C'est exactement pour ça qu'il est important de comprendre les systèmes différentiels linéaires.*

3.2 Utilisation du wronskien

Exemple 65 (Berth p78)**.** *Si* q *est intégrable alors les solutions maximales de* $y'' + q(t)y = 0$ *sont définies sur* $\mathbb{R}_+$ *et il existe des solutions non bornées.*

Theoreme 66 (Berth p279)**.** *Théorème d'entrelacement de Strum.*